4. cvičení - teorie

Věta 11. Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- Množiny $[f > c], [f < c]$ jsou otevřené.
- Množiny $[f = c], [f \geq c], [f \leq c]$ jsou uzavřené.

Definice 1. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je *omezená*, pokud existuje $r > 0$ t.ž. $M \subset B(0, r)$.

Věta 12 (Charakterizace kompaktních množin)**.** Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

Definice 2. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n, x \in M, f$ je fuknce t.ž. $M \subset D(f)$. Řekneme, že f nabývá v bodě x

- *maxima na* M, pokud $\forall y \in M\colon f(x) \geq f(y)$.
- *lokálního maxima vzhledem k* M, existuje-li $\delta > 0$ t.ž. $\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(x) \geq f(y)$.

Analogicky se definuje *(lokální) minimum.*

Věta 14 (o nabývání extrémů)**.** Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná kompaktní množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ spojitá, pak f na M mnabývá svého maxima i minima.

Věta 16 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je ot. mn., $a \in G$ a funkce $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ má v a lokální extrém. Pak pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ buď neexistuje, nebo je rovna nule.

Poznámka. Věta 16 nám dává body podezřelé z lokálního maxima a pouze na otevřené množině G - proto je potřeba si ještě hlídat hranice množiny apod.

Fakt. Je-li f spojitá, potom je $\sup_M f = \sup_{\overline{M}} f$ a $\inf_M f = \inf_{\overline{M}} f$.

Notace. Je-li $M \subset \mathbb{R}^2$, budeme značit *řezy množiny* M následujícím způsobem:

$$M_x = \{y \in \mathbb{R}\colon [x, y] \in M\}, x \in \mathbb{R},$$
$$M^y = \{x \in \mathbb{R}\colon [x, y] \in M\}, y \in \mathbb{R}.$$

Návod (kompaktní mn.)

- Ukážeme, že je M omezená a uzavřená, a tedy kompaktní.
- Je-li f na M spojitá, tak víme, že maximum i minimum existuje. Hledáme podezřelé body.

- Máme-li užitečný postřeh, použijeme ho (např. redukce počtu vazeb či zjednodušení f).
- Podíváme se na vnitřek M a najdeme body, kde je gradient f nulový, nebo neexistuje.
- Podíváme se na hranici M. Máme dvě možnosti.
  - Parametrizujeme ji (či její část) a zkoumáme zde úlohu s o jedna nižší dimenzí.
  - Použijeme Lagrangeovy multiplikátory (typicky pracné, ale vede k cíli).
- Mezi podezřelé body zahrneme krajní body hranice.
- Porovnáme funkční hodnoty všech podezřelých bodů a vybereme z nich maxima a minima.